# 1

**Задача 1.** *По прямой без проскальзываний катится эллипс. Найти уравнение траектории его фокуса.*

**Решение.** Пусть $F$ — фокус эллипса, $S$ — центр эллипса, $M$ — точка касания эллипса и данной прямой, $SA$ — большая полуось, $\angle\alpha$ — угол между фокальным радиусом и данной прямой (рис. 1). Тогда, очевидно, координаты эллипса можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} x_F &= OM - MF \cdot \cos\alpha \\ y_F &= MF \cdot \sin\alpha \end{aligned} \tag{1.1}$$

Заметим, что $OM = \breve{AM}$, так как эллипс катится без проскальзываний, а $\breve{AM}$ — длина эллиптической дуги, пройденной точкой с нулевого момента. Эта геометрическая характеристика не зависит от системы координат (равно, как и $\angle\alpha$), поэтому рассмотрим такую систему координат, центр и оси которой совпадают с центром и осями эллипса (рис.2). Введем естественную параметризацию эллипса:

$$r(t) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Тогда $\breve{AM} = \int\limits_0^t |r'(\tau)|d\tau = \int\limits_0^t \sqrt{a^2\sin^2\tau + b^2\cos^2\tau}d\tau = \int\limits_0^t \sqrt{a^2 - c^2\cos^2\tau}d\tau$ (здесь $a$, $b$ — полуоси, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — эксцетриситет).

Найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \overline{MF}, -r\prime \right\rangle}{|\overline{MF}| \cdot |-r\prime|} = \frac{\left\langle \overline{FM}, r\prime \right\rangle}{|\overline{FM}| \cdot |r\prime|} \tag{1.2}$$

$\overline{FM} = \{a\cos\alpha - c, b\sin\alpha\}$;

$|\overline{FM}|^2 = a^2\cos^2 t - 2ac\cos t + c^2 + b^2\sin^2 t = a^2 - a^2\sin t + c^2 + b^2\sin^2 t = (a - c\cos t)^2$;

$|r\prime|^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = a^2 - c^2\cos^2 t$;

$\left\langle \overline{FM}, r\prime \right\rangle = (-a\sin t)(a\cos t - c) + b\sin t \cdot b\cos t = -a^2\sin t\cos t + ac\sin t + b^2\sin t\cos t = c\sin t(a - c\cos t)$. Подставляя в (1.2), получаем:

$$\cos\alpha = \frac{(a - c\cos t)c\sin t}{(a - c\cos t)\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} = \frac{c\sin t}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} \tag{1.3}$$

Заметим, что $0 < \alpha < \pi$, откуда:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t - c^2\sin^2 t}}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} \tag{1.4}$$

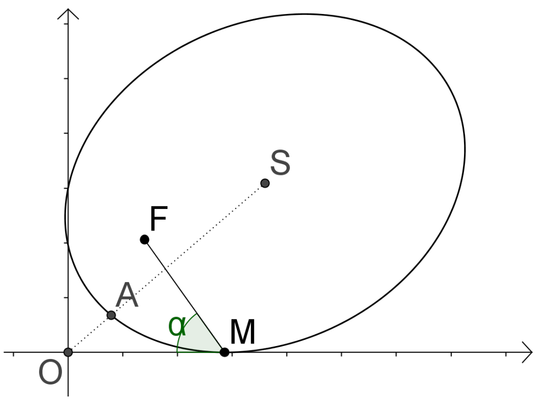


Рис. 1

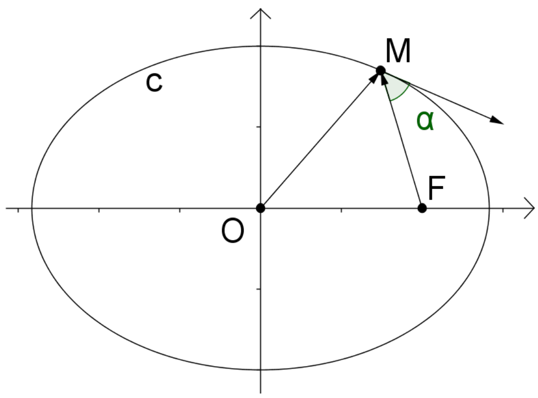


Рис. 2

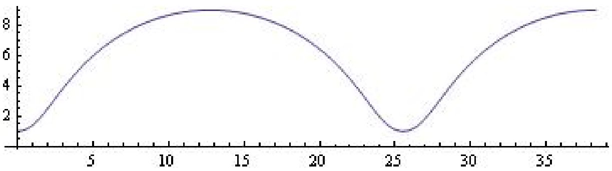


Рис. 3

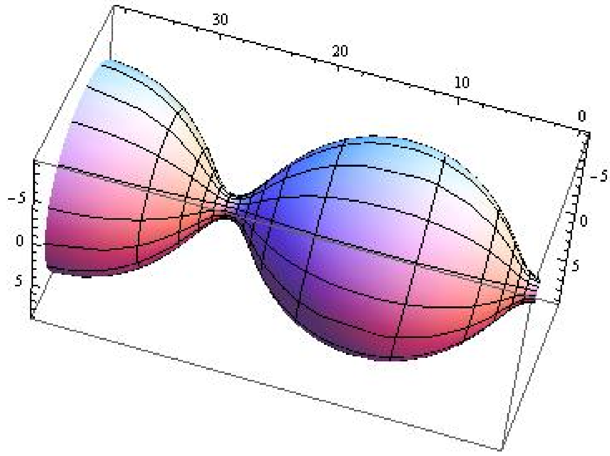


Рис. 4

Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.1), получаем:

$$x_F = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2\cos^2\tau}\,d\tau + c\sin t\frac{a - c\cos t}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}$$

$$y_F = \sqrt{a^2 - c^2}\frac{a - c\cos t}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}$$

Полученная кривая называется эллиптической цепной (Elliptic catenary). На рис. 3 изображен её график. Вращая эллиптическую цепную вокруг $OX$, получаем поверхность, называемую андулоидом (Unduloid), (рис.4).