МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Им. В.Н.КАРАЗИНА

Кривые постоянной ширины и их свойства

Курсовая работа

по курсу дифференциальной геометрии

студентки группы М-121 ММФ

Хмельницкой Анастасии Игоревны

Харьков 2014.

Содержание

I. Определения кривых постоянной ширины

Чтобы понять суть такого геометрического объекта, как кривая постоянной ширины, следует начать с интуитивного ее представления.

Окружность – это замкнутая плоская кривая, каждая точка которой равноудалена от данной точки M – центра окружности. На практике это свойство можно увидеть, например, у колеса: длины всех его спиц равны, а ступица всегда находится на постоянном расстоянии от горизонтальной плоскости. Именно благодаря этому возможно строго горизонтальное движение транспортного средства. Также вышеупомянутое свойство окружности можно увидеть, если мы будем перемещать коробку, расположив ее на круговых цилиндрах и равномерно продвигая в необходимом нам направлении. Такое движение также будет строго горизонтальным, то есть расстояние от коробки до плоскости, по которой мы ее перемещаем, будет постоянным. Но наличие в сечении этих цилиндров окружностей не является необходимым условием горизонтального движения, хотя и является достаточным. Необходимым является лишь постоянное расстояние между двумя параллельными прямыми, касающимися цилиндра сверху и снизу, в каждый момент движения.

Кроме окружности существует множество кривых, обладающих таким свойством – эти кривые и называются кривыми постоянной ширины.

Очевидно, что ширину любой замкнутой плоской кривой в заданном направлении ***u*** можно определить следующим образом: возьмите ортогональную проекцию кривой на прямую, лежащую в одной с ней плоскости и перпендикулярную вектору ***u.*** Две экстремальные такие проекции обладают следующим свойством: они содержат хотя бы одну точку кривой и относительно которых вся кривая лежит в одной полуплоскости (такие прямые называются опорными прямыми). Расстояние между этими прямыми называется шириной кривой, а если это расстояние постоянно для всех направлений ***u***, то кривая является кривой постоянной ширины.

II. Свойства кривых постоянной ширины

- Длина кривой постоянной ширины ***a*** равна ***πa*** (теорема Барбье).
- Центры вписанной и описанной окружностей в кривую постоянной ширины совпадают, а сумма их радиусов равна ширине кривой.
- Фигура постоянной ширины ***a*** может вращаться в квадрате со стороной ***a***, всё время касаясь каждой из сторон.
- Среди всех фигур данной постоянной ширины треугольник Рело имеет наименьшую площадь, а круг — наибольшую.
- Любую плоскую фигуру диаметра ***a*** можно накрыть фигурой постоянной ширины ***a***.

III. Построение кривых постоянной ширины

Существует два вида кривых постоянной ширины – одни из них построены на многоугольниках или прямых, другие на эволютах и эвольвентах. Рассмотрим оба случая.

1) Многоугольники и прямые

Самый простой пример кривой постоянной ширины – треугольник Рело – кривая постоянной ширины, построенная на правильном треугольнике. Построить ее очень просто. При помощи циркуля проведите дугу окружности произвольного радиуса (*рис. 1.1*). Не изменяя раствора циркуля, переместите иголку на эту дугу и проведите еще одну, так чтобы она пересекала первую дугу (*рис. 1.2*). Теперь переместите иглу циркуля в


Рис. 1.1

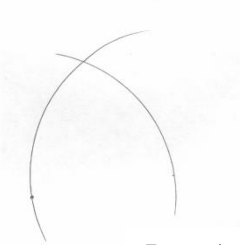


Рис. 1.2

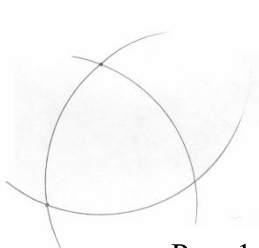


Рис. 1.3

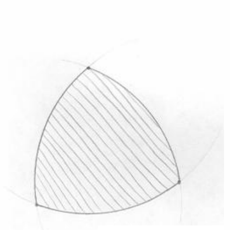


Рис. 1.4

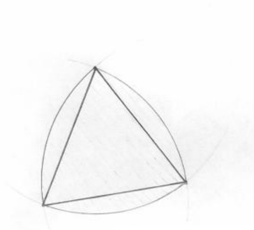


Рис. 1.5

точку пересечения этих двух дуг, все также не изменяя раствора, и проведите последнюю дугу, пересекающую предыдущие две (*рис. 1.3*). Полученная замкнутая плоская кривая и будет треугольником Рело (*рис. 1.4*), а если соединить ее вершины, то получится правильный треугольник (*рис. 1.5*). Можно было строить эту кривую и в обратном порядке – по заданному правильному треугольнику. В таком случае, необходимо ставить иглу циркуля в каждую вершину последовательно, расстояние до любой из вершин, соединенных противолежащей нашей вершине стороной, брать за радиус и соединять эти две вершины дугой. Точно также можно строить и все остальные кривые постоянной ширины, в основе которых лежат правильные многоугольники с нечетным числом вершин. Такие кривые называются многоугольниками Рело.

На правильных многоугольниках строятся симметричные кривые, но это не является обязательным условием для кривой постоянной ширины. Второй способ построения – на любом количестве пересекающихся прямых. Проведите произвольное количество пересекающихся прямых и отметьте все точки пересечения (*рис. 2.1*). Этот способ построения будет похож на предыдущий, поскольку кривая будет так же строиться из дуг окружностей, однако здесь эти окружности будут иметь разные радиусы. Выбирая первую точку пересечения прямых для начала построения кривой постоянной ширины, следует помнить, что все эти точки должны будут оказаться внутри нашей кривой. Поэтому, чтобы удачно построить кривую, можно пунктиром построить окружность, такую, что все эти точки будут лежать внутри нее (*рис. 2.2*). Поставьте иглу циркуля в такую точку, в которой отрезок прямой между ней и окружностью имеет наибольшую длину, и эту же длину возьмите за радиус. Проведите дугу окружности между двумя прямыми, пересечением которых является эта точка (*рис. 2.3*). Следующие прямые, которые будут

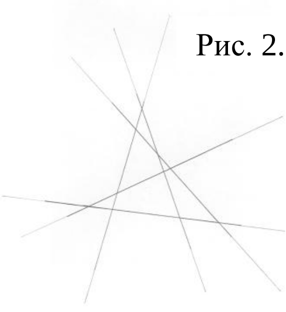


Рис. 2.1

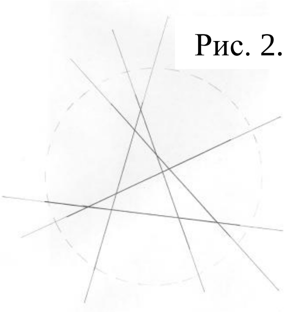


Рис. 2.2

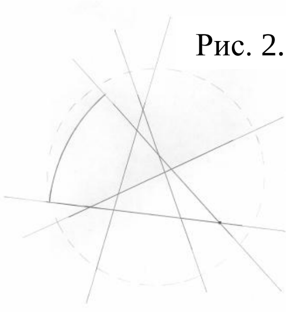


Рис. 2.3

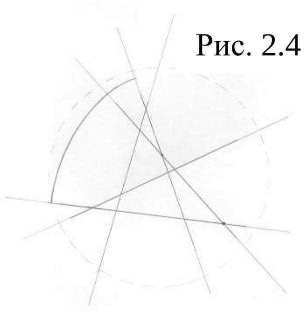


Рис. 2.4

соединены дугой – это одна из прямых, которые мы соединяли дугой на предыдущем шаге построения, и соседняя с ней ("соседство" будем определять по порядку пересечения прямыми окружности). Поставьте иглу циркуля в точку пересечения этих прямых, в качестве радиуса возьмите расстояние от этой точки до точки пересечения предыдущей дуги с одной из этих прямых и проведите вторую дугу (*рис. 2.4*). Проделайте аналогичную процедуру для всех остальных прямых, пока кривая не замкнется (*рис. 2.5-2.12*).

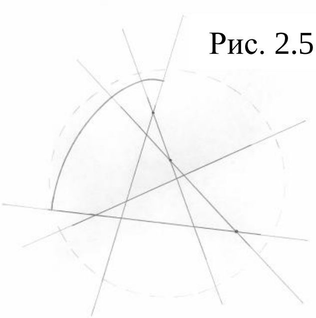


Рис. 2.5

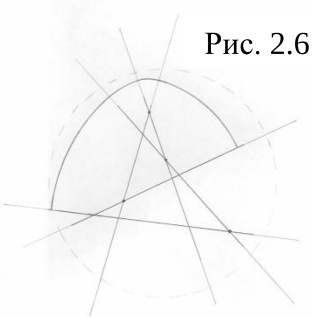


Рис. 2.6

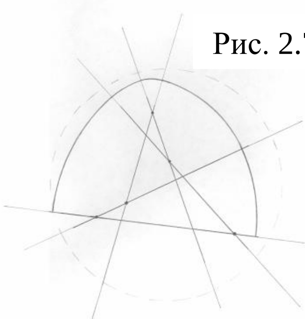


Рис. 2.7

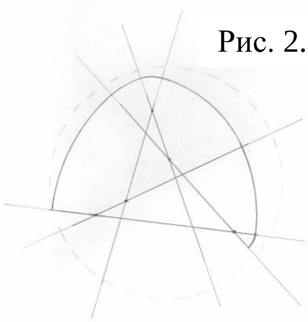


Рис. 2.8

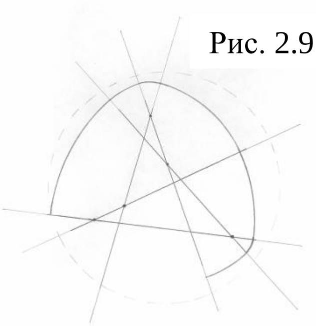


Рис. 2.9

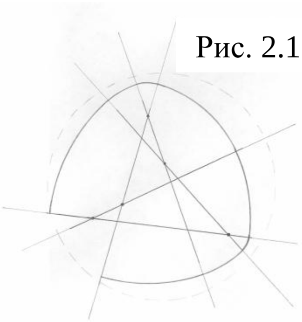


Рис. 2.10

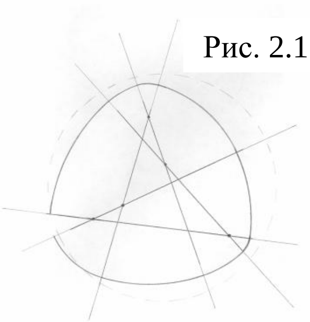


Рис. 2.11

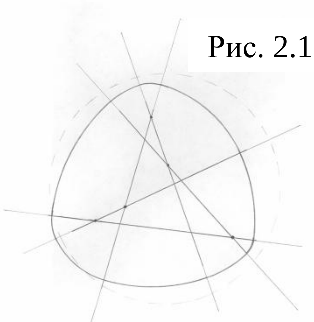


Рис. 2.12

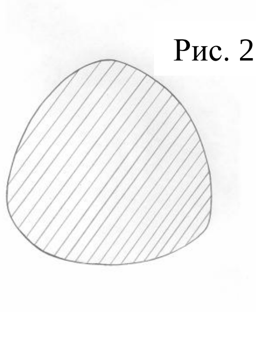


Рис. 2.13

Полученная кривая будет кривой постоянной ширины (*рис. 2.13*). Если посмотреть на эту кривую на рис. 2.12, то видно, что для того, чтобы описать ее всю, необходимо вращать один и тот же отрезок, меняя только точку, вокруг которой он вращается, а значит, ширина этой кривой действительно будет постоянной.

2) Эволюты и эвольвенты

Еще один способ построения кривой постоянной ширины - по ее заданной эволюте, обладающей некоторыми свойствами (например, она должна иметь нечетное число вершин). То есть, чтобы построить кривую постоянной ширину, нам нужно построить эвольвенту к данной нам кривой. Уравнение эвольвенты выглядит следующим образом:

$$\rho(s) = r(s) + (\lambda - s)\tau(s)$$

Значит, когда мы будем идти по нашей кривой, увеличивая значения параметра ***s*** (а попросту длину пройденной дуги кривой), длина касательных векторов в каждой следующей точке будет пропорционально увеличиваться (а именно будет равняться этой длине дуги). Пройдя такой путь на всех участках кривой дважды (ведь в каждой точке кривая будет иметь две касательные, направленные в противоположном направлении), мы получим кривую постоянной ширины.

Простейшим примером является дельтоида (кривая Штейнера) - кривая, описываемая фиксированной точкой окружности, которая катится по внутренней стороне другой окружности, радиус которой втрое больше радиуса первой (*рис. 3.1*). Построив касательные ко всем трем участкам кривой по два раза, как описано выше (*рис. 3.2*-*3.7*), мы получим кривую постоянной ширины (*рис. 3.8*).

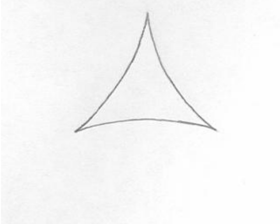


Рис. 3.1

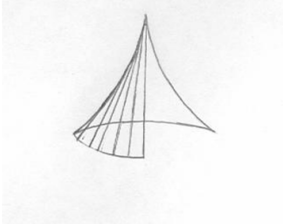


Рис. 3.2

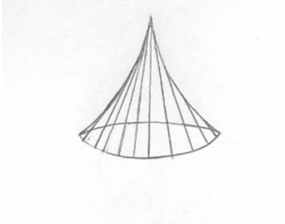


Рис. 3.3

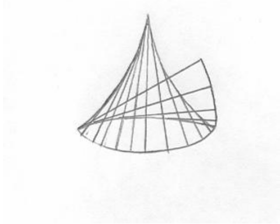


Рис. 3.4

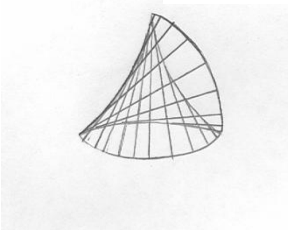


Рис. 3.5

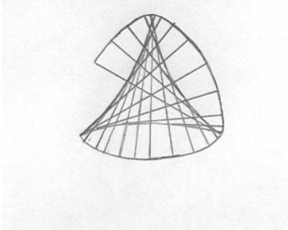


Рис. 3.6

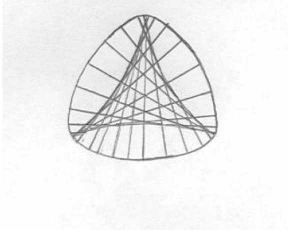


Рис. 3.7

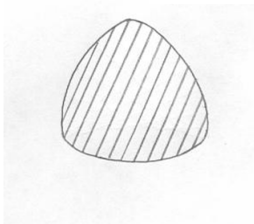
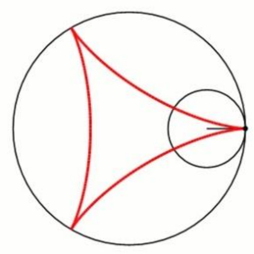


Рис. 3.8



Список использованной литературы

1. G. Fischer, Mathematical Models, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1986. – С. 49-55

2. http://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_постоянной_ширины

3. http://aurahome.ru/gard5.html

4. http://ru.wikipedia.org/wiki/Дельтоида